<u>פונקציות הטריגונומטריות ההפוכות .</u>

חשוב מאד להציג לתלמידי 5 יח"ל את הנושא פונקציות טריגונומטריות הפוכות. לו הזדמנות בה:

1. ***א. אנו מציגים פונקציה הפוכה ומשתמשים בה ובנגזרת.***
2. ***ב. בפונקציות אלה יש דיון בתחום ההגדרה וכן בטווח הפונקציה.***
3. ***ג. זהו המקום היחיד בו ניתן להראות לתלמידים פונקציה המוגדרת בנקודה בודדת אחת.***
4. ***ד. תירגול הנושא יפגיש את התלמידים עם זהויות להן לא נחשפו שבהן באגף אחד יש ביטויים טריגונומטריים ובאגף השני ביטויים אלגבריים.***

ידע קודם נדרש: הפונקציות הטריגונומטריות הישרות.

הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות הן בעצם פעולות ה- SHIFT שתלמידים מקישים במחשבון. כאשר תלמיד נתקל בתרגיל: $Sin\,x = -\frac{1}{2}$ אם הוא יעבור על המעגל הטריגונומטרי על-פי סדר הרביעים, הפעם הראשונה שתתקבל התוצאה הרצויה היא ב- $210°$, אך הקשה על : $SHIFT SIN\left(-\frac{1}{2}\right)$ תראה את התוצאה: $-30°$, למה?

התשובה נעוצה באופן הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

<u>: $Arc\sin$</u> אם: $Arc\sin x = y$ אז: $Sin y = x$.

כדי להגדיר פונקציה, יש לוודא כי לכל ערך של x קיים ערך יחיד של y .

בפונקציה $y = Arc\sin x$, תחום ההגדרה הוא: $-1 \le x \le 1$, על-פי הגדרת הפונקציה סינוס והמעגל הטריגונומטרי. נשים לב לכך שקיימות תוצאות רבות לכל ערך של x , אנו חייבים להגדיר טווח שיתן ערך יחיד לכל ערך של x בתחום ההגדרה. הטווח נקבע באופן שרירותי, כך שיהיה רציף. במקרה של $y = Arc\sin x$ הטווח מוגדר: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. מכאן ברור מדוע המחשבון מראה את התוצאה $-30°$ ולא $210°$.

שרטוט

דוגמה: חשבון: $Arc\sin-\frac{\sqrt{2}}{2}=$

פתרון: $Arc\sin-\frac{\sqrt{2}}{2}=-45°$

דוגמה נוספת: מהו תחום ההגדרה של הפונקציה הבאה: $y=Arc\sin\left(x^2+1\right)$?

פתרון: תחום ההגדרה לפונקציה זו הוא:

$$-1\le x^2+1\le 1$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x=0}$$

כלומר, הפונקציה מוגדרת בנקודה אחת בלבד והיא: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$Arc\cos$: אם: $Arc\cos x=y$ אז: $Cos y=x$.

שוב, כדי שהפונקציה תהיה מוגדרת, תחום ההגדרה הוא: $-1\le x\le 1$,

וטווח הפונקציה יוגדר על-ידי : $0\le y\le\pi$.

שרטוט

דוגמה: חשבון: $Arc\cos-\frac{1}{2}=?$.

פתרון: הפונקציה קוסינוס מקבלת ערכים שליליים ברביע השני ולכן: $Arc\cos-\frac{1}{2}=120°$.

<u>דוגמה נוספת:</u> מהו תחום ההגדרה של הפונקציה: $y = Arc\cos\frac{2x^2-2x+1}{x^2}$?

פתרון: תחום ההגדרה לפונקציה זו הוא:

$$-1 \le \frac{2x^2-2x+1}{x^2} \le 1$$
$$\Downarrow$$
$$-1 \le \frac{2x^2-2x+1}{x^2} \quad and \quad \frac{2x^2-2x+1}{x^2} \le 1$$
$$3x^2-2x+1 \ge 0 \qquad (x-1)^2 \le 0$$
$$\Delta \prec 0 \qquad \boxed{x=1}$$
$$\boxed{any\ \ x}$$

שוב, הפונקציה מוגדרת בנקודה אחת בלבד והיא: $(1,0)$.

<u>תרגילים נוספים:</u>

1. הוכיחו כי: $Cos(Arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$.

הוכחה:

$$Sin\,y = x$$
$$\Downarrow$$
$$Arc\sin x = y$$

נציב באגף שמאל ונגיע לאגף ימין:

$$Cos(Arc\sin x) = Cos\,y = \sqrt{1-Sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

2. הוכיחו כי: $Sin(2\,Arc\sin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

הוכחה:

$$Sin\,y = x$$
$$\Downarrow$$
$$Arc\sin x = y$$

נציב באגף שמאל ונגיע לאגף ימין:

$$Sin(2\,Arcsun\,x) = Sin\,2y = 2Siny\,Cosy = 2x\sqrt{1-Sin^2 y} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

3. הוכיחו כי $Arc\sin x+Arc\cos x=\frac{\pi}{2}$ בקטע הסגור: $[-1,1]$.

הוכחה:

$$Arc\sin x+Arc\cos x=\frac{\pi}{2} \qquad \Big|Sin$$

$$Sin\left(Arc\sin x+Arc\cos x\right)=Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underbrace{Sin\left(Arc\sin x\right)}_{1}\underbrace{Cos\left(Arc\cos x\right)}_{2}+\underbrace{Cos\left(Arc\sin x\right)}_{3}\underbrace{Sin\left(Arc\cos x\right)}_{4}=Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

נפשט כל אחד מהביטויים:

ביטוי ראשון:

$$Sin\left(Arc\sin x\right)=?$$
$$y=Arc\sin x \quad \Rightarrow \quad Sin\, y=x$$
$$Sin\left(Arc\sin x\right)=Sin\, y=x$$

ביטוי שני:

$$Cos\left(Arc\cos x\right)=?$$
$$y=Arccon\, x \quad \Rightarrow \quad Cos\, y=x$$
$$Cos\left(Arc\cos x\right)=Cos\, y=x$$

ביטוי שלישי:

$$Cos\left(Arc\sin x\right)=\sqrt{1-x^2}$$

לפי תרגיל מס' 1.

ביטוי רביעי:

$$Sin\left(Arc\cos x\right)=?$$
$$Arc\cos x=y \quad \Rightarrow \quad Cos\, y=x$$
$$Sin\left(Arc\cos x\right)=Sin\, y=\sqrt{1-Cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

נציב כעת את כל הביטויים שקיבלנו:

$$\underbrace{Sin\left(Arc\sin x\right)}_{1}\underbrace{Cos\left(Arc\cos x\right)}_{2}+\underbrace{Cos\left(Arc\sin x\right)}_{3}\underbrace{Sin\left(Arc\cos x\right)}_{4}=Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \cdot x + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$x^2+1-x^2=1$$

$$1=1$$

הזהות מתקיימת.

<u>נגזרות הפונקציות ההפוכות:</u>

נגזרת הפונקציה $Arc\sin$:

$$y=Arc\sin x \quad\Rightarrow\quad Sin\,y=x$$

נגזור שני אגפים, שימו לב כי הפונקציה מורכבת:

$$Cos\,y\cdot y'=1 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{Cos\,y}=\frac{1}{\sqrt{1-Sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

לסיכום:

$$\boxed{\left(Arc\sin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

נגזרת הפונקציה $Arc\cos$:

$$y=Arc\cos x \quad\Rightarrow\quad Cos y=x$$

נגזור שני אגפים, שוב נשים לב כי הפונקציה מורכבת:

$$-Sin\,y\cdot y'=1 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{-1}{Sin\,y}=\frac{-1}{\sqrt{1-Cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

לסיכום:

$$\boxed{\left(Arc\cos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

<u>דוגמה :</u>

גזרו את הפונקציה הבאה: $y = Arc\sin\frac{2}{x}$.

פתרון:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right) = \frac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$$