

אינטגרציה בסימון ואינטגרציה בחלקים

נושא זה כדאי שיוצג בסיום ההוראה השיטתית של נושא האינטגרל הכללי מסוייט. הפונקציות בדף הצמודה הן משאלון 806. על המורה לבחור את המשימות המתאימות לפונקציות אותן לימד.

אינטגרציה בסימון היא שיטה המקלה על פתרון אינטגרלים. השימוש בה נעשה כאשר אנו מזהים פונקציה וניגזרתה, עד כדי קבוע.

דוגמא:

נפתור את האינטגרל הבא:

$$\int \sin(\cos x) \sin x \, dx = - \int \sin u \, du = \cos u + c = \cos(\cos x) + c$$

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x \, dx = du$$

נסמן:

$$(\cos(\cos x) + c)' = -\sin(\cos x) \cdot (-\sin x) = \sin(\cos x) \sin x$$

נבדוק את תשובתנו:

הפתרון נכון.

אינטגרציה בחלקים היא "תמונת הראי" של כלל נגזרת המכפלה.

$$(uv)' = u'v + v'u \quad \text{אם:}$$

אזי ביצוע אינטגרציה על שני האגפים תוביל לביטוי:

$$\int (uv)' \, dx = \int (u'v) \, dx + \int (v'u) \, dx$$

$$uv = \int u'v \, dx + \int v'u \, dx \quad \text{ומכאן:}$$

$$\int u'v \, dx = uv - \int v'u \, dx \quad \text{ולבסוף:}$$

דוגמא:

נפתור את האינטגרל הבא:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$\sin x \, dx = u' \Rightarrow -\cos x = u$$

נסמן:

$$x = v \Rightarrow 1 \, dx = v'$$

$$(-x \cos x + \sin x + c)' = -1 \cos x + x \sin x + \cos x = x \sin x$$

נבדוק את תשובתנו:

הפתרון נכון.

פתרו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int \sin^2 x \cos x dx =$

2. $\int \cos^3 x \sin x dx =$

3. $\int (1 + \sin x)^9 \cos x dx =$

4. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx =$

5. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$

6. $\int \frac{\sin \frac{5}{\phi}}{\phi^2} d\phi =$

7. $\int \frac{\sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$

8. $\int x^2 \sec^2(x^3) dx =$

9. $\int \frac{\sin 2y}{(5 + \cos 2y)^3} dy =$

10. $\int \sin(\sin x) \cos x dx =$

11. $\int \frac{dx}{\left(\frac{1}{3}x - 8\right)^5} =$

12. $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2 + 5}} dx =$

$$13. \int (5x-1)^2 dx =$$

פתרו בשתי דרכים שונות

הסבירו את השוני לכאורה בתוצאות.

$$14. \int t^4 \sqrt[3]{3-5t^5} dt =$$

$$15. \int x\sqrt{x-1} dx =$$

$$16. \int \frac{y}{\sqrt{y+1}} dy =$$

$$17. \int \sin^3 2x dx =$$

$$17. \int \sin x \cos x dx =$$

פתרו בשלוש דרכים שונות.

$$19. \int x \sin 2x dx =$$

$$20. \int x \cos 3x dx =$$

$$21. \int x^2 \cos x dx =$$

$$22. \int (x - x \cos x) dx =$$

$$23. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$24. \int \cos^3 x dx =$$

פתרו בשתי דרכים שונות.

$$25. \int x \cos^3(x^2) dx =$$

$$26. \int \frac{\sin^3 \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$27. \int \sin^2 x \cos^2 x dx =$$

$$28. \int \tan \alpha \sec^7 \alpha d\alpha =$$

$$29. \int \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} d\beta =$$

בשתי דרכים שונות.

צב/דה מהנה!!!!

מפתחות לפתרון:

1. אינטגרציה בסימון: $\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$
2. אינטגרציה בסימון: $\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$
3. אינטגרציה בסימון: $1 + \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$
4. אינטגרציה בסימון: $\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$
5. אינטגרציה בסימון: $\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 2du$
6. אינטגרציה בסימון: $\frac{5}{\phi} = u \Rightarrow \frac{-5}{\phi^2} d\phi = du \Rightarrow \frac{1}{\phi^2} = -\frac{1}{5} du$
7. תזכורת: $\operatorname{Cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ אינטגרציה בסימון כמו בתרגיל 5. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
8. אינטגרציה בסימון: $x^3 = u \Rightarrow 3x^2 dx = du \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$
9. אינטגרציה בסימון: $5 + \cos 2y = u \Rightarrow -2 \sin 2y dy = du \Rightarrow \sin 2y dy = \frac{-1}{2} du$
10. כמו תרגיל 1.
11. אינטגרציה בסימון: $\frac{1}{3}x - 8 = u \Rightarrow \frac{1}{3} dx = du \Rightarrow dx = 3 du$
12. אינטגרציה בסימון: $4x^2 + 5 = u \Rightarrow 8x dx = du \Rightarrow 3x dx = \frac{3}{8} du$
13. דרך א': פתיחת סוגרים ואינטגרציה.
- דרך ב': אינטגרציה בסימון: $5x - 1 = u \Rightarrow dx = \frac{1}{5} du$
14. אינטגרציה בסימון: $3 - 5t^5 = u \Rightarrow -25t^4 dt = du \Rightarrow t^4 dt = \frac{-1}{25} du$
15. אינטגרציה בחלקים: $\begin{cases} u = x \Rightarrow u' = 1 dx \\ v' = \sqrt{x-1} dx \Rightarrow v = \frac{2}{3}(x-1)^{1.5} \end{cases}$
16. אינטגרציה בחלקים: $\begin{cases} u = y \Rightarrow u' = 1 dy \\ v' = \frac{1}{\sqrt{y+1}} dy \Rightarrow v = 2\sqrt{y+1} \end{cases}$
17. פישוט ואינטגרציה בחלקים:

$$\sin^3 2x dx = \int \sin 2x (1 - \cos^2 2x) dx = \int \sin 2x dx - \int \cos^2 2x \sin 2x dx =$$

האינטגרל הראשון פשוט. האינטגרל השני נפתר בסימון:

$$\cos 2x = u \Rightarrow -2 \sin 2x dx = du \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{1}{2} du$$

18. דרך א': נסמן $\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$. התוצאה תהיה: $\frac{1}{2} \sin^2 x + c$.

דרך ב': נשתמש בזהות טריגונומטרית יסודית $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.

התוצאה תהיה: $-\frac{1}{4} \cos 2x + c$.

נותר להראות כי התוצאות נבדלות בקבוע.

$$19. \text{ אינטגרציה בחלקים: } \begin{cases} u = x & \Rightarrow u' = dx \\ v' = \sin 2x dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$20. \text{ אינטגרציה בחלקים: } \begin{cases} u = x & \Rightarrow u' = dx \\ v' = \cos 3x dx & \Rightarrow v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{cases}$$

$$21. \text{ אינטגרציה בחלקים פעמיים. בפעם הראשונה: } \begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow u' = 2x dx \\ v' = \cos x dx & \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{ובפעם השנייה: } \begin{cases} u = 2x & \Rightarrow u' = 2 dx \\ v' = \sin x dx & \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$22. \text{ בשלב ראשון, נפרק לגורמים: } \int x(1 - \cos x) dx$$

$$\text{בשלב שני אינטגרציה בחלקים: } \begin{cases} u = x & \Rightarrow u' = dx \\ v' = (1 - \cos x) dx & \Rightarrow v = (x - \sin x) \end{cases}$$

$$23. \text{ בשלב ראשון נפריד את השבר: } \int x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\text{בשלב שני נבצע אינטגרציה בחלקים: } \begin{cases} u = x^2 & \Rightarrow u' = 2x dx \\ v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx & \Rightarrow v = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\text{בשלב שלישי נבצע סימון: } u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$24. \text{ דרך א': בדומה לתרגיל 17, נפריד: } \int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx$$

ומשם כמו תרגיל 17.

$$\text{דרך ב': נשתמש בזהות יסוד לזווית כפולה } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cdot \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) dx \quad \text{לכן:}$$

מכאן נפתח סוגריים ונשתמש בזהויות למכפלת פונקציות.

$$\int x \cos^3(x^2) dx = \int \cos(x^2) \cdot x \cdot (1 - \sin^2(x^2)) dx \quad \text{25. בשלב ראשון נפריד:}$$

$$\int x \cos(x^2) dx - \int x \cos(x^2) \sin^2(x^2) dx \quad \text{פתיחת סוגריים:}$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du \quad \text{האינטגרל הראשון נפתר בקלות על-ידי סימון}$$

האינטגרל השני נפתר על-ידי שימוש בזהויות יסוד:

$$\int x \cdot \cos(x^2) \cdot \sin(x^2) \cdot \sin(x^2) dx = \int x \cdot \frac{1}{2} \sin(2x^2) \cdot \sin(x^2) dx$$

ומכאן לפי זהות למכפלת פונקציות.

$$24. \text{ בשלב ראשון נסמן: } u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad \text{ומכאן, כמו בתרגיל.}$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2(2x) dx \quad \text{27. נפתור תוך שימוש בזהויות יסוד}$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)) \quad \text{שוב נשתמש בזהויות יסוד}$$

ומכאן האינטגרל פשוט.

$$\int \tan \alpha \sec^7 \alpha d\alpha = \int \frac{\sin \alpha}{\cos^8 \alpha} d\alpha \quad \text{28. נפשט תחילה:}$$

$$u = \cos \alpha \Rightarrow u' = -\sin \alpha d\alpha \quad \text{מכאן, סימון פשוט פותר את האינטגרל}$$

$$29. \text{ דרך א': } \int \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} d\beta = \int 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} d\beta \quad \text{לפי סינוס זווית כפולה,}$$

$$u = \cos \frac{\beta}{2} \Rightarrow u' = -\frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2} \quad \text{מכאן סימון}$$

דרך ב': על פי זהויות מכפלת שתי פונקציות.